

Практическое занятие ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

1. Линейные операции над векторами. Линейная зависимость векторов

Определение 1. Геометрическим вектором, или просто вектором, называется **направленный отрезок**.

Вектор обозначается символом \overrightarrow{AB} , где точки A и B - начало и конец данного вектора, либо \vec{a} . Начало вектора называют **точкой его приложения**.

Определение 2. Вектор называется **нулевым**, если начало и конец его совпадают.

Нулевой вектор не имеет определенного направления и имеет длину, равную нулю. Это позволяет при записи отождествлять нулевой вектор с вещественным числом нуль.

Определение 3. Векторы называются **коллинеарными**, если они лежат либо на одной прямой, либо на параллельных прямых.

Определение 4. Три вектора называются **компланарными**, если они лежат в одной плоскости.

Определение 5. Два вектора называются **равными**, если они коллинеарны, имеют одинаковую длину и одинаковое направление.

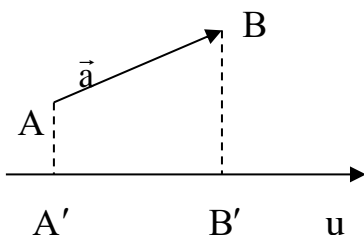
Все нулевые векторы считаются равными.

Определение 6. Суммой $\vec{a} + \vec{b}$ двух векторов \vec{a} и \vec{b} называется **вектор**, идущий из начала вектора \vec{a} в конец вектора \vec{b} при условии, что вектор \vec{b} приложен к концу вектора \vec{a} .

Определение 7. Разностью $\vec{a} - \vec{b}$ вектора \vec{a} и вектора \vec{b} называется такой **вектор** \vec{c} , который в сумме с вектором \vec{b} дает вектор \vec{a} .

Определение 8. Произведением $\alpha\vec{a}$ вектора \vec{a} на действительное число α называется вектор \vec{b} , коллинеарный вектору \vec{a} , имеющий длину, равную $|\alpha| \cdot |\vec{a}|$, и имеющий направление, совпадающее с направлением вектора \vec{a} при $\alpha > 0$ и противоположное направлению вектора \vec{a} при $\alpha < 0$.

Обозначим буквами A' и B' основания перпендикуляров, опущенных на ось u из точек A и B соответственно.



Определение 9. Проекцией вектора $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ на ось u называется величина $A'B'$ направленного отрезка $\overrightarrow{A'B'}$ оси u и обозначается $\text{пр}_u \vec{a}$.
 $\text{пр}_u \vec{a} = |\vec{a}| \cos \varphi$, где φ - угол между вектором \vec{a} и осью u .

Любой вектор \vec{a} может быть разложен по декартову прямоугольному базису $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$: $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Числа x, y, z - называется декартовыми прямоугольными координатами вектора \vec{a} . Обозначим буквами α, β и γ углы наклона вектора \vec{a} к осям координат; $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ называются направляющими косинусами вектора \vec{a} .

Длина вектора через его координаты имеет вид:

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Направляющие косинусы вектора вычисляются по формулам:

$$\cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}; \quad \cos \beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}; \quad \cos \gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

откуда следует $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$.

Определение 10. Ортом вектора \vec{a} называется вектор \vec{a}^0 , удовлетворяющий условиям:

- 1) \vec{a}^0 коллинеарен вектору \vec{a} ,
- 2) $|\vec{a}^0| = 1$.

Координатами орта вектора являются направляющие косинусы.

Если два вектора \vec{a}_1 и \vec{a}_2 заданы в декартовых прямоугольных координат $\vec{a}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$, $\vec{a}_2 = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$, то:

$$\vec{a}_1 + \vec{a}_2 = (x_1 + x_2)\vec{i} + (y_1 + y_2)\vec{j} + (z_1 + z_2)\vec{k},$$

$$\alpha\vec{a} = (\alpha x_1)\vec{i} + (\alpha y_1)\vec{j} + (\alpha z_1)\vec{k}.$$

Условие коллинеарности векторов имеет вид:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}.$$

Решение типовых примеров

Задача 1. Найти вектор $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, если $\vec{a} = (2; 3; -1)$, $\vec{b} = (5; 9; 7)$.

Решение. $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = (2+5; 3+9; -1+7) = (7; 12; 6)$.

Задача 2. Найти вектор $\vec{d} = 4\vec{p} + 5\vec{q}$, если $\vec{p} = (4; 5; -6)$, $\vec{q} = (8; 2; 1)$.

Решение. $4\vec{p} = (4 \times 4; 5 \times 4; -6 \times 4) = (16; 20; -24)$

$5\vec{q} = (8 \times 5; 2 \times 5; 1 \times 5) = (40; 10; 5)$

Тогда:

$$\vec{d} = 4\vec{p} + 5\vec{q} = (16 + 40; 20 + 10; -24 + 5) = (56; 30; -19).$$

Задача 3. Разложить вектор $\vec{S} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ по трем некопланарным векторам: $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b}$, $\vec{q} = \vec{a} - \vec{b}$, $\vec{r} = 2\vec{b} + 3\vec{c}$.

Решение. $\vec{S} = \alpha\vec{p} + \beta\vec{q} + \gamma\vec{r}$.

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \alpha(\vec{a} + \vec{b}) + \beta(\vec{a} - \vec{b}) + \gamma(2\vec{b} + 3\vec{c}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b} + \beta\vec{a} - \beta\vec{b} + 2\gamma\vec{b} + 3\gamma\vec{c}.$$

Приравняем коэффициенты справа и слева:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1, \\ \alpha - \beta + 2\gamma = 1, \text{ тогда } \alpha = \frac{2}{5}; \beta = \frac{3}{5}; \gamma = \frac{3}{5} \text{ и } \vec{S} = \frac{2}{5}\vec{p} + \frac{3}{5}\vec{q} + \frac{3}{5}\vec{r}. \\ -2\alpha + 3\gamma = 1, \end{cases}$$

Задача 4. Даны точки $A(1; 7; 0)$, $B(5; 7; 3)$, $C(7; 6; 5)$. Разложить вектор $\vec{a} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}$ по ортам \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} и найти его длину, направляющие косинусы, орт вектора \vec{a} .

Решение. Найдем координаты векторов:

$$\overrightarrow{AC} = (7 - 1; 6 - 7; 5 - 0) = (6; -1; 5)$$

$$\overrightarrow{BC} = (7 - 5; 6 - 7; 5 - 3) = (2; -1; 2).$$

$$\text{Вектор } \vec{a} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC} = (6 - 2; -1 - (-1); 5 - 2) = (4; 0; 3).$$

Тогда $|\vec{a}| = \sqrt{4^2 + 0 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$, следовательно,

$$\cos \alpha = \frac{4}{5}, \quad \cos \beta = 0, \quad \cos \gamma = \frac{3}{5}, \quad \vec{a} = \left\{ \frac{4}{5}; 0; \frac{3}{5} \right\}.$$

Задания для решения в аудитории

1. Найти вектор $\vec{c} = \vec{a} - 3\vec{b}$, если $\vec{a} = (-4; 13; 1)$, $\vec{b} = (2; 3; 4)$.
2. Найти вектор $\vec{p} = 7\vec{m} + 9\vec{n}$, если $\vec{m} = (7; 1; -25)$, $\vec{n} = (21; -3; -8)$.
3. Даны точки $A(-2; 3; 6)$, $B(1; 2; 5)$, $C(-2; 7; 3)$. Разложить вектор $\vec{a} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}$ по ортам \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} и найти его длину, направляющие косинусы, орт вектора \vec{a} .

2. Скалярное произведение векторов

Определение 11. Скалярным произведением ненулевых векторов \vec{a} и \vec{b} называется число, равное произведению их модулей на косинус угла между ними:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha$$

Модулем вектора $\vec{a} = (x; y; z)$ (или длиной вектора \vec{a}) называется корень квадратный из суммы квадратов координат вектора:

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Свойства скалярного произведения:

- 1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ - произведение векторов коммутативно.
- 2) Скалярный квадрат вектора равен квадрату его модуля:

$$\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$$

$$\vec{a}^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos 0^\circ = |\vec{a}|^2 \Rightarrow \boxed{|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}}$$

- 3) Если $\vec{a} \perp \vec{b}$, то их скалярное произведение равно нулю:

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = 0}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos 90^\circ = 0$$

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = |\vec{i}|^2 = 1; \quad \vec{i} \cdot \vec{j} = |\vec{i}| \cdot |\vec{j}| \cdot \cos 90^\circ = 0$$

Причем, произведение одноименных орт равно единице, а разноименных орт равно нулю (см. таблицу):

	\vec{i}	\vec{j}	\vec{k}
\vec{i}	1	0	0
\vec{j}	0	1	0
\vec{k}	0	0	1

- 4) Скалярное произведение векторов, заданных координатами равно сумме произведений одноименных координат:

$$\begin{aligned}
& (x_1 \cdot \bar{i} + y_1 \cdot \bar{j} + z_1 \cdot \bar{k}) \cdot (x_2 \cdot \bar{i} + y_2 \cdot \bar{j} + z_2 \cdot \bar{k}) = \\
& = x_1 \cdot \bar{i} \cdot x_2 \cdot \bar{i} + \cancel{x_1 \cdot \bar{i} \cdot y_2 \cdot \bar{j}} + \cancel{x_1 \cdot \bar{i} \cdot z_2 \cdot \bar{k}} + \cancel{y_1 \cdot \bar{j} \cdot x_2 \cdot \bar{i}} + y_1 \cdot \bar{j} \cdot y_2 \cdot \bar{j} + \\
& + \cancel{y_1 \cdot \bar{j} \cdot z_2 \cdot \bar{k}} + \cancel{z_1 \cdot \bar{k} \cdot x_2 \cdot \bar{i}} + \cancel{z_1 \cdot \bar{k} \cdot y_2 \cdot \bar{j}} + z_1 \cdot \bar{k} \cdot z_2 \cdot \bar{k} = \\
& = \boxed{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}
\end{aligned}$$

5) Из формулы скалярного произведения векторов можно найти косинус угла между двумя векторами: $\cos \alpha = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|}$

В координатной форме: $\cos \alpha = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$

Решение типовых примеров

Задача 1. Перпендикулярны ли два вектора $\bar{a} = (3; -2; 6)$; $\bar{b} = (7; 4; 9)$.

Найти угол между векторами \bar{a} и \bar{b} .

Решение. $3 \cdot 7 + (-2) \cdot 4 + 6 \cdot 9 = 21 - 8 + 54 = 67 \neq 0$, следовательно, векторы \bar{a} и \bar{b} не перпендикулярны.

Задача 2. Даны два вектора $\bar{a} = (1; 2; -2)$; $\bar{b} = (2; -1; 2)$. Найти угол между векторами \bar{a} и \bar{b} .

Решение. $\cos \varphi = \frac{1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + (-2) \cdot 2}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = -\frac{4}{3 \cdot 3} = -\frac{4}{9}$

Тогда: $\varphi = \pm \arccos\left(-\frac{4}{9}\right) + 2\pi n = \pm(\pi - \arccos \frac{4}{9}) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

Задача 3. Найти угол α между векторами $\bar{p} = 2\bar{a} + \bar{b}$ и $\bar{q} = \bar{a} - \bar{b}$, если $\bar{a} = (4; 1; -2)$; $\bar{b} = (1; 2; 3)$.

Решение. Зная, что $\cos \varphi = \frac{\bar{p} \cdot \bar{q}}{|\bar{p}| \cdot |\bar{q}|}$, определим координаты векторов \bar{p} и \bar{q} :

$$\bar{p} = (2 \cdot 4 + 1; 2 \cdot 1 + 2; 2 \cdot (-2) + 3) = (9; 4; -1)$$

$$\bar{q} = (4 - 1; 1 - 2; -2 - 3) = (3; -1; -5).$$

Найдем скалярное произведение векторов по их координатам:

$$\bar{p} \cdot \bar{q} = 9 \cdot 3 + 4 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-5) = 27 - 4 + 5 = 28$$

Их длины равны:

$$|\bar{p}| = \sqrt{9^2 + 4^2 + (-1)^2} = \sqrt{81 + 16 + 1} = \sqrt{98}$$

$$|\bar{q}| = \sqrt{3^2 + (-1)^2 + (-5)^2} = \sqrt{9 + 1 + 25} = \sqrt{35}$$

$$\text{Тогда, } \cos\varphi = \frac{28}{\sqrt{98} \cdot \sqrt{35}} = \frac{28}{\sqrt{3430}},$$

$$\text{следовательно, } \alpha = \pm \arccos \frac{28}{\sqrt{3430}} + 2\pi n, n \in Z.$$

Задания для решения в аудитории

1. Перпендикулярны ли векторы:

а) $\bar{a} = (7; -3; 2)$; $\bar{b} = (1; 7; 7)$

б) $\bar{a} = (10; 6; 2)$; $\bar{b} = (2; 3; 1)$

в) $\bar{a} = (-4; 9; 5)$; $\bar{b} = (4; -9; -5)$

2. Даны два вектора $\bar{a} = (7; 1; -25)$, $\bar{b} = (21; -3; -8)$. Найти угол между векторами \bar{a} и \bar{b} .

3. Даны вершины треугольника. Определить его внутренние углы, если $A=(2; 5; 4)$, $B=(3; 1; -5)$, $C=(0; -7; 1)$.

4. Раскрыть скобки в выражении $(2i - j) \cdot j + (j - 2k) \cdot k + (i - 2k)^2$